Global small amplitude solutions to systems of nonlinear Klein-Gordon equations with several mass terms (On Global Behavior of Solutions for Nonlinear Hyperbolic Systems)

数理解析研究所講究録 1331 巻 2003 年 71-83

Global small amplitude solutions to systems of nonlinear Klein-Gordon equations with several mass terms

大阪大学大学院理学研究科　砂川 秀明 (Hideaki Sunagawa)

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University,
Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

1 序

1.1 問題とその背景

非線型 Klein-Gordon 方程式系の初期値問題

$$(NLKG) \qquad \begin{cases} (\Box + m_i^2)u_i = F_i(u, \partial u), & t > 0, x \in \mathbf{R}^n, \\ (u_i, \partial u_i)|_{t=0} = (\varepsilon f_i, \varepsilon g_i), & i = 1, \cdots, N \end{cases}$$

を考える. ここで, $\varepsilon > 0$ は小さなパラメーター, $f_i, g_i \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ (Schwartz class), m_i は正の定数とし, $u = (u_i)_{1\le i\le N}$, $\partial u = (\partial_a u_i)_{1\le i\le N; 0\le a\le n}$, $\partial = (\partial_a)_{a=0,1,\cdots,n} = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, $\Box = \partial_0^2 - \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ とする. また, 非線型項 F_i は $(u, \partial u)$ についての p 次斉次多項式[1] とする ($p \ge 2$, 整数). 上の初期値問題に対する解の時間局所存在はよく知られているので, 興味は解の長時間挙動が方程式の非線型性にどう影響されるかにある. 本稿では初期値が十分小さくて滑らかな場合について, 非線型項 $F = (F_i)_{1\le i\le N}$ の形状と解の時間大域存在および $t \to \infty$ における漸近挙動との間の関係について論じたい. より正確に言えば, $f_i, g_i \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ は任意に与えられるものとして, 非線型項 F に対してどのような条件を課せば以下のことが成り立つかを考える:

(G) $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $\varepsilon \le \varepsilon_0 \Longrightarrow \exists^{1} u$ sol. of $(NLKG)$ in $C^\infty([0,\infty[\times\mathbf{R}^n)$.

(L) $\exists U = (U_i(t,x))_{1\le i\le N}$ satisfying $\begin{cases} (\Box + m_i^2)U_i = 0 & t > 0, \\ (U, \partial_t U)|_{t=0} \in H^1 \times L^2(\mathbf{R}^n), & i = 1, \cdots, N \end{cases}$
s.t. $\|u(t) - U(t)\|_E \to 0$ as $t \to \infty$.

但し, $v = (v_i(t,x))_{1\le i\le N}$ に対して $\|v(t)\|_E^2 := \sum_{i=1}^N \int \{(\partial_t v_i)^2 + |\nabla_x v_i|^2 + m_i^2 v_i^2\} dx$. $H^1(\mathbf{R}^n)$ は通常の Sobolev 空間. また, 以下では (L) が成り立つとき「解は漸近自由である」ということにする.

[1] これは単に表記を煩雑にしないために課したのであって, 本質的な制約ではない. 実際には F_i は多項式である必要はなく, $(u, \partial u)$ に十分滑らかに依存していて, $(v, w) = 0$ の近傍で $|F(v,w)| \le C(|v|^p + |w|^p)$ ($\exists C > 0$) という評価を持っている場合には本稿と同様の議論が可能である.

本題に入る前に, 背景について簡単に触れておく.

この種の問題は1980年代から S. Klainerman, G. Ponce, J. Shatah を始めとする多くの研究者により考察され, これまでに数多くの結果が得られている. 空間次元が大きいほど基本解は早く減衰することから, 小さなデータに対する初期値問題を考える限り, 直観的には空間次元 n と非線型項の次数 p がある程度大きい場合には解の長期的な挙動は線型方程式の解の挙動に近いと考えられる. 実際, 次の事実が知られている.

定理 1.1 $p > 1 + \frac{2}{n}$ の場合, 初期値問題 $(NLKG)$ について (G) と (L) が成立する.

この主張における $p > 1 + \frac{2}{n}$ という制約は, 解の減衰評価とエネルギー評価を用いてアプリオリ評価を得ようとしたときに現れる積分 $\int_0^\infty (1+t)^{-\frac{n(p-1)}{2}} dt$ の収束に関係する. 詳細については Hörmander [5] の 7 章等を参照されたい. ([5] では単独方程式 $(N=1)$ の場合のみを扱っているが, 連立系の場合も証明は同様である.) 定理 1.1 から特に, 空間次元が 3 以上ならば非線型項に付加条件なく[2] 解は小さな初期値に対して時間大域的に存在して漸近自由である. 従って, 空間低次元で非線型項の次数が大きくない場合に注目することになる.

$p = 1 + \frac{2}{n}$, 即ち $(n,p) = (2,2)$ または $(1,3)$ の場合には, 期待できる解の減衰が不十分なために状況は複雑になる. まず, 単独方程式 $(N=1)$ の場合, 空間 2 次元・非線型項 2 次の場合には非線型項の形状について何も付加条件を課さなくても漸近自由な大域解が存在することがことが知られているが ([11]), これに対して空間 1 次元・非線型項 3 次の場合には非線型項の形状に対して何らかの条件が必要になる. 例えば Yordanov によると $u_{tt} - u_{xx} + u = u_t^2 u_x$ に対しては (G) は成り立たない ([5, Proposition 7.8.8] 参照). また, Georgiev-Yordanov [4] によれば, Sine-Gordon 方程式 $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$ (i.e. $F(u) = u - \sin u = \frac{1}{6}u^3 + O(u^4)$) に対しては (G) は成り立つが (L) は成り立たない. その一方で, 非線型項の形状に関してある種の条件を課せば漸近自由な大域解が存在することがわかっている. ([2] [6] [9] 等. 但しこれらの条件を記すのは少し面倒なので本稿では述べない. 第 3 節で関連事項に触れる.) また, 連立系の場合については, 空間 2 次元・非線型項 2 次の場合にも, 漸近自由な大域解が存在するためには非線型項の形状に対して何らかの制約が必要であることが [14] で指摘されている. 以上のように, $p = 1 + \frac{2}{n}$ の場合は臨界的な場合に相当しており, 解の長時間挙動は非線型項の形状に大きく影響を受ける. しかし, これまでに質量項が互いに等しいとは限らない連立系を扱った研究は少なく, 解の長時間挙動と非線型項の形状との間にどのような関係があるのかまだ十分に解明しきれていないと思われる. そこで本稿ではこの場合を考察の対象とする.

次に, 質量項が互いに等しいとは限らない連立系の場合を考える際に問題となることについて触れておく. 先述のとおり, 臨界的な場合には 期待される解の減衰が不十分な為に, 一般には線型からの摂動と見なして素朴に問題を取り扱うことができない. このような場合を扱う際の代表的な方法として, Shatah [12] による normal form method と呼ばれる手法がよく知られている. これはある種の多重線型積分作用素によって, 次数の低い非線型

[2] ここで言う付加条件とは, d'Alembertian の場合に知られている Null condition (cf. [7]) のような, 非線型項の形状に関する条件を指す.

項を持つ方程式を高次の非線型項を持つ方程式に帰着させてアプリオリ評価を得るという方法であり, 主に単独で 2 次の非線型性をもつ場合を扱うのに効果的に用いられてきた ([12], [11], [10], [9] etc.). しかし [6], [14] 等で既に指摘されているように, 連立系や 3 次の非線型性を問題にする場合には, 変換に用いる作用素の連続性が保証されない為に, かなり特殊な場合にしか Shatah の方法は適用できず, このことが難点のひとつになっていた. 本稿では積分作用素の代わりに [6], [8], [14] に見られるような 未知函数とその微分からなる多項式を用いた代数的な議論により, 次節で導入する “non-resonance” というクラスの非線型項についてこの困難を解決する.

1.2 主結果

以下, 主結果を述べる. そのためにまず, 次のような非線型項のクラスを導入する.

定義 1.1 p 次の非線型項 $F=(F_i)_{i=1,\cdots,N}$ が以下の形に書けるとき, F は *non-resonance* であるという:
$p=3$ の場合

$$F_i(u,\partial u)=\sum_{(j,k,l)\#i}\ \sideset{}{'}\sum_{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\le 1}(\partial^\alpha u_j)(\partial^\beta u_k)(\partial^\gamma u_l),$$

$p=2$ の場合

$$F_i(u,\partial u)=\sum_{(j,k)\#i}\ \sideset{}{'}\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1}(\partial^\alpha u_j)(\partial^\beta u_k).$$

上の定義における $\#$ と $\sum'$ の意味は次の通り (これらは標準的な記法ではない).

・$\{m_i\}_{1\le i\le N}$ が与えられている時, 添字 $i,\ j,\ k,\ l\in\{1,\cdots,N\}$ の間に

$$m_i-(\kappa_1 m_j+\kappa_2 m_k+\kappa_3 m_l)\neq 0 \quad \text{for all} \quad \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\in\{\pm 1\}$$

なる関係があることを $(j,k,l)\#i$ と記す. また,

$$m_i-(\kappa_1 m_j+\kappa_2 m_k)\neq 0 \quad \text{for all} \quad \kappa_1,\kappa_2\in\{\pm 1\}$$

が満たされるとき $(j,k)\#i$ と記す.

・ある $c_\lambda\in\mathbf{R}$ があって $\phi(t,x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda\phi_\lambda(t,x)$ と表されるとき $\phi(t,x)=\sideset{}{'}\sum_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda(t,x)$ と記す.

以下に述べるのが本稿の主結果である.

定理 1.2 $p=1+\frac{2}{n}$, 即ち $(n,p)=(1,3)$ または $(n,p)=(2,2)$ とする. 非線型項 F が *non-resonance* ならば, (G) (L) の意味で初期値問題 $(NLKG)$ に対する漸近自由な大域解が存在する.

この定理のうち空間 2 次元・非線型項 2 次の場合については, 本質的には Y. Tsutsumi [14] によって得られていた. 次節では空間 1 次元, 非線型項 3 次の場合について, [13] に従って証明の概略を述べる.

最後に, 定理の仮定を満たすいくつかの典型例をあげて, この節を終えよう.

例 1. 空間 2 次元で

$$\begin{cases} (\Box + m_1^2)u_1 = c_1 u_2 u_3 \\ (\Box + m_2^2)u_2 = c_2 u_3 u_1 \\ (\Box + m_3^2)u_3 = c_3 u_1 u_2 \end{cases}$$

($m_1 \geq m_2 \geq m_3 > 0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$) の場合, $m_1 \neq m_2 + m_3$ ならば non-resonance.

例 2. 空間 1 次元で

$$\begin{cases} (\Box + m^2)u = F(v, \partial v) \\ (\Box + M^2)v = G(u, \partial u) \end{cases}$$

(F, G は 3 次の非線型項) の場合, $(3m-M)(m-M)(m-3M) \neq 0$ ならば non-resonance.

例 3. 単独方程式 ($N=1$) については, $(n,p)=(2,2)$ のときは non-resonance であり, $(n,p)=(1,3)$ のときは non-resonance でない.

(これについては第 3 節の注意も参照されたい.)

2 証明の概略

2.1 可換なベクトル場と null form

はじめに幾つかの記号を導入する. なお, 本節と 2.2 節の議論はすべて空間次元に依らないから, 空間次元 を n として話を進める.

まず, $x_0 := -t$ として $\Omega_{ab} := x_b\partial_a - x_a\partial_b$ $(0 \leq a, b \leq n)$ とおき,

$$\Gamma := (\Gamma_1, \cdots, \Gamma_K) = (\partial_a, \Omega_{bc}\ ;\ 0 \leq a \leq n, 0 \leq b < c \leq n), \quad K = (n+1)(n+2)/2$$

と定める. このとき次の関係式が成り立つ ([5], [7]):

$$\begin{aligned} &[\Box + m^2, \Gamma_j] = 0 \qquad (m \in \mathbf{R}) \\ &[\Omega_{ab}, \partial_c] = \eta_{bc}\partial_a - \eta_{ca}\partial_b \\ &[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = -\eta_{ac}\Omega_{bd} - \eta_{bd}\Omega_{ac} + \eta_{ad}\Omega_{bc} + \eta_{bc}\Omega_{ad}. \end{aligned}$$

但し $[A,B] = AB - BA$, $(\eta_{ab})_{0 \leq a,b \leq n} = \mathrm{diag}(1, -1, \cdots, -1)$. 次に

$$Q_{ab}(f,g) := (\partial_a f)(\partial_b g) - (\partial_b f)(\partial_a g), \quad (0 \leq a, b \leq n),$$

$$Q_0(f,g) := (\partial_t f)(\partial_t g) - \nabla_x f \cdot \nabla_x g = \sum_{a,b=0}^{n} \eta_{ab}(\partial_a f)(\partial_b g)$$

とおく. これらは null form と呼ばれている ([5], [7]). Q_{ab} に関して

$$
\begin{aligned}
x_c Q_{ab}(f,g) &= (\Omega_{cb} f)(\partial_a g) - (\Omega_{ca} f)(\partial_b g) - (\partial_c f)(\Omega_{ab} g),\\
\partial_c Q_{ab}(f,g) &= Q_{ab}(\partial_c f, g) + Q_{ab}(f, \partial_c g),\\
\Omega_{cd} Q_{ab}(f,g) &= Q_{ab}(\Omega_{cd} f, g) + Q_{ab}(f, \Omega_{cd} g)\\
&\qquad + \eta_{ac} Q_{bd}(f,g) + \eta_{bd} Q_{ac}(f,g) - \eta_{ad} Q_{bc}(f,g) - \eta_{bc} Q_{ad}(f,g)
\end{aligned}
$$

が成り立つから, これより直ちに次の補題を得る.

補題 2.1

$$
\Gamma^\alpha Q_{ab}(f,g) = \sum_{c,d=0}^{n} \sum_{|\beta|+|\gamma|\le|\alpha|}{}' Q_{cd}(\Gamma^\beta f, \Gamma^\gamma g),
$$

$$
|Q_{ab}(f,g)| \le \frac{C}{(1+t+|x|)} \sum_{|\alpha|\le 1} \left(|\Gamma^\alpha f||\partial g| + |\partial f||\Gamma^\alpha g|\right).
$$

但し C は (t,x) に依らない非負定数. また, 多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_K)$ に対して $\Gamma^\alpha = \Gamma_1^{\alpha_1} \cdots \Gamma_K^{\alpha_K}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_K$ という記法を用いた. (以下, 特に断りなく用いる.)

この補題が示唆するように, Q_{ab} は Klein-Gordon 作用素 $(\Box + m^2)$ と相性がよい 2 次形式なのだが, $m \neq 0$ の場合には Q_0 については必ずしもそうでないことに注意しよう ([3] 参照).

2.2 非線型項の分解

本節では, 主定理の証明において重要な役割を果たす非線型項の分解について述べる. 目標は次の命題を証明することである.

命題 2.1 u は $(NLKG)$ を満たし, 3 次の非線型項 F は *non-resonance* であるとすると, 次の分解が成立する :

$$
F_i(u, \partial u) = (\Box + m_i^2)\Phi_i + \Psi_i + R_i,
$$

但し,

Φ_i は $\partial^\alpha u_i$ $(|\alpha| \le 2, 1 \le j \le N)$ に関する 3 次の非線型項,

R_i は $\partial^\alpha u_i$ $(|\alpha| \le 3, 1 \le j \le N)$ に関する 5 次の非線型項,

Ψ_i は

$$
\sum_{j,k,l=1}^{N} \sum_{a,b=0}^{n} \sum_{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\le 2}{}' (\partial^\alpha u_j)\, Q_{ab}(\partial^\beta u_k, \partial^\gamma u_l)
$$

の形をした項, Q_{ab} は *null form* である.

注 1. Ψ_i は strong null condition を満たす (see [3], [6], [14]).
注 2. この命題より特に, F が non-resonance ならば, 元の方程式 $(NLKG)$ は

$$(\Box + m_i^2)(u_i - \Phi_i) = \Psi_i + R_i$$

と変形される. これが主定理の証明の鍵になる. (同様の手法は Katayama [6], Kosecki [8], Tsutsumi [14] 等で用いられている.)

さて, 命題 2.1 を示そう. そのために 2 つの補題を用意する. 以下, μ_j $(j = 0,1,2,3)$ を実数とし, v_i $(i = 1,2,3)$ を $(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n}$ の函数とする.

補題 2.2 $\{\mu_j\}_{j=0}^3$ がすべての $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \{\pm 1\}$ に対して $\mu_0 - (\kappa_1\mu_1 + \kappa_2\mu_2 + \kappa_3\mu_3) \neq 0$ を満たすならば, 以下の分解が成立する：

$$v_1v_2v_3 = (\Box + \mu_0^2)\Phi + \Psi + R.$$

但し,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\le 1}{}' (\partial^\alpha v_1)(\partial^\beta v_2)(\partial^\gamma v_3), \\
\Psi &= \sum_{\sigma\in S_3} \sum_{0\le a,b\le n} \sum_{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\le 1}{}' \sigma\Big[(\partial^\alpha v_1)Q_{ab}(\partial^\beta v_2, \partial^\gamma v_3)\Big], \\
R &= \sum_{\sigma\in S_3} \sum_{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\le 1}{}' \sigma\Big[(\partial^\alpha v_1)(\partial^\beta v_2)(\Box + \mu_3^2)\partial^\gamma v_3\Big] \\
&\quad + \sum_{\sigma\in S_3}{}' \sigma\Big[v_1\big\{(\Box + \mu_2^2)v_2\big\}\big\{(\Box + \mu_3^2)v_3\big\}\Big].
\end{aligned}$$

ここで, 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix} \in S_3$ に対して $\sigma[\varphi(v_1, v_2, v_3)] = \varphi(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, v_{\sigma_3})$ という記法を用いた.

補題 2.3 Q_0, Q_{ab} を *null form* として

$$\psi_0 := v_1v_2v_3,\ \psi_1 := v_1Q_0(v_2, v_3),\ \psi_2 := v_2Q_0(v_3, v_1),\ \psi_3 := v_3Q_0(v_1, v_2)$$

とおくとき,

$$\det A = \prod_{\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\in\{\pm 1\}} \left(\mu_0 - \sum_{j=1}^3 \kappa_j\mu_j\right)$$

を満たす行列 $A = (a_{ij})_{0\le i,j\le 3}$ をうまく選んで,

$$(*) \qquad (\Box + \mu_0^2)\psi_j = \sum_{i=0}^3 a_{ij}\psi_i + r_j, \quad r_j \in \mathcal{R}$$

($j=0,1,2,3$) が成り立つようにできる. 但し $\mathcal{R}$ は

$$\sigma\Big[(\partial^\alpha v_1)(\partial^\beta v_2)(\Box+\mu_3^2)\partial^\gamma v_3\Big],\quad \sigma\Big[v_1\big\{(\Box+\mu_2^2)v_2\big\}\big\{(\Box+\mu_3^2)v_3\big\}\Big],$$
$$\text{または}\quad \sigma\Big[(\partial^\alpha v_1)Q_{ab}(\partial^\beta v_2,\partial^\gamma v_3)\Big]$$

($\sigma\in S_3,\ |\alpha|,|\beta|,|\gamma|\le 1,\ 0\le a,b\le n$) の形の項の線型結合で表されるものの全体を表す.

補題 2.2 から命題 2.1 が従うことは明らか. また, 補題 2.2 は補題 2.3 より直ちに従う. 実際, $\mu_0-(\kappa_1\mu_1+\kappa_2\mu_2+\kappa_3\mu_3)\neq 0$ という条件は $\det A\neq 0$ と同値であるから, このとき

$$\begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

とおけば, 補題 2.3 より

$$\psi_0=\sum_{i,j=0}^{3}a_{ij}b_j\psi_i=(\Box+\mu_0^2)\left(\sum_{j=0}^{3}b_j\psi_j\right)-\sum_{j=0}^{3}b_jr_j$$

となって所要の式を得る. 結局, 命題 2.1 を得るためには補題 2.3 を示せばよい. 以下この証明を述べよう. 最初に, 適当な 係数 a_{ij} $(0\le i,j\le 3)$ を用いて $(*)$ が成り立つことを見る. まず $(*)_{j=0}$ については, 直接計算により

$$\begin{aligned}(\Box+\mu_0^2)(v_1v_2v_3)=&\mu^2v_1v_2v_3+v_1v_2\Box v_3+v_2v_3\Box v_1+v_3v_1\Box v_2\\&+2v_1Q_0(v_2,v_3)+2v_2Q_0(v_3,v_1)+2v_3Q_0(v_1,v_2)\\=&(\mu_0^2-\mu_1^2-\mu_2^2-\mu_3^2)v_1v_2v_3+2\psi_1+2\psi_2+2\psi_3\\&+v_1v_2(\Box+\mu_3^2)v_3+v_2v_3(\Box+\mu_1^2)v_1+v_3v_1(\Box+\mu_2^2)v_2\\\equiv&(\mu_0^2-\mu_1^2-\mu_2^2-\mu_3^2)\psi_0+2\psi_1+2\psi_2+2\psi_3\qquad(\mathrm{mod}\ \mathcal{R}).\end{aligned}$$

$(*)_{j=1}$ については, まず上と同じ計算により

$$\begin{aligned}&(\Box+\mu_0^2)\{v_1Q_0(v_2,v_3)\}\\=&\mu_0^2v_1Q_0(v_2,v_3)+(\Box v_1)Q_0(v_2,v_3)+v_1Q_0(\Box v_2,v_3)+v_1Q_0(v_2,\Box v_3)\\&+2\sum_{a,b=0}^{n}\eta_{ab}(\partial_av_1)Q_0(\partial_bv_2,v_3)+2\sum_{a,b=0}^{n}\eta_{ab}v_1Q_0(\partial_av_2,\partial_bv_3)+2\sum_{a,b=0}^{n}\eta_{ab}(\partial_bv_1)Q_0(v_2,\partial_av_3)\end{aligned}$$

となるが, 恒等式

$$\begin{aligned}(\partial_av_1)(\partial_c\partial_bv_2)(\partial_dv_3)&=(\partial_a\partial_bv_2)(\partial_dv_3)(\partial_cv_1)+(\partial_dv_3)Q_{ac}(v_1,\partial_bv_2),\\v_1(\partial_c\partial_av_2)(\partial_d\partial_bv_3)&=v_1(\partial_a\partial_bv_2)(\partial_c\partial_dv_3)+v_1Q_{cb}(\partial_av_2,\partial_dv_3),\\(\partial_bv_1)(\partial_cv_2)(\partial_d\partial_av_3)&=(\partial_a\partial_bv_3)(\partial_dv_1)(\partial_cv_2)+(\partial_cv_2)Q_{db}(\partial_av_3,v_1)\end{aligned}$$

に注目すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{a,b=0}^{n} \eta_{ab}(\partial_a v_1) Q_0(\partial_b v_2, v_3) &= \sum_{a,b,c,d=0}^{n} \eta_{ab}\eta_{cd}(\partial_a v_1)(\partial_c\partial_b v_2)(\partial_d v_3) \\
&= (\Box v_2) Q_0(v_3, v_1) + \sum_{a,b,c,d=0}^{n} \eta_{ab}\eta_{cd}(\partial_d v_3) Q_{ac}(v_1, \partial_b v_2) \\
&\equiv \{-\mu_2^2 v_2 + (\Box + \mu_2^2) v_2\} Q_0(v_3, v_1) \\
&\equiv -\mu_2^2 \psi_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{a,b=0}^{n} \eta_{ab} v_1 Q_0(\partial_a v_2, \partial_b v_3) &= \sum_{a,b,c,d=0}^{n} \eta_{ab}\eta_{cd} v_1 (\partial_c\partial_a v_2)(\partial_d\partial_b v_3) \\
&= v_1(\Box v_2)(\Box v_3) + \sum_{a,b,c,d=0}^{n} \eta_{ab}\eta_{cd} v_1 Q_{cb}(\partial_a v_2, \partial_d v_3) \\
&\equiv v_1\{-\mu_2^2 v_2 + (\Box + \mu_2^2) v_2\}\{-\mu_3^2 v_3 + (\Box + \mu_3^2) v_3\} \\
&\equiv \mu_2^2 \mu_3^2 \psi_0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{a,b=0}^{n} \eta_{ab}(\partial_b v_1) Q_0(v_2, \partial_a v_3) &= \sum_{a,b,c,d=0}^{n} \eta_{ab}\eta_{cd}(\partial_b v_1)(\partial_c v_2)(\partial_d\partial_a v_3) \\
&= (\Box v_3) Q_0(v_1, v_2) + \sum_{a,b,c,d=0}^{n} \eta_{ab}\eta_{cd}(\partial_c v_2) Q_{db}(\partial_a v_3, v_1) \\
&\equiv -\mu_3^2 \psi_3
\end{aligned}
$$

が, $\mathcal{R}$ を法として成り立つ. よって

$$
(\Box + \mu_0^2)\psi_1 \equiv 2\mu_2^2\mu_3^2\psi_0 + (\mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2)\psi_1 - 2\mu_2^2\psi_2 - 2\mu_3^2\psi_3 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathcal{R})
$$

となって, $(*)_{j=1}$ が得られる. $(*)_{j=2}$ と $(*)_{j=3}$ を得るには添字を $(1,2,3) \to (2,3,1) \to (3,1,2)$ と並べ替えればいい.

次に, 上で得られた $(a_{ij})_{0\le i,j\le 3} =: A$ が条件を満たすことを見よう. A は具体的に

$$
\begin{pmatrix}
\mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 & 2\mu_2^2\mu_3^2 & 2\mu_3^2\mu_1^2 & 2\mu_1^2\mu_2^2 \\
2 & \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 & -2\mu_1^2 & -2\mu_1^2 \\
2 & -2\mu_2^2 & \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 & -2\mu_2^2 \\
2 & -2\mu_3^2 & -2\mu_3^2 & \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2
\end{pmatrix}
$$

と表されるから,

$$B = \mathrm{diag}(1, -\mu_2\mu_3, -\mu_3\mu_1, -\mu_1\mu_2),$$
$$P = \begin{pmatrix} \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 & -2\mu_2\mu_3 \\ -2\mu_2\mu_3 & \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 \end{pmatrix},$$
$$Q = \begin{pmatrix} -2\mu_3\mu_1 & -2\mu_1\mu_2 \\ -2\mu_1\mu_2 & -2\mu_3\mu_1 \end{pmatrix}$$

とおけば, $A = B^{-1}\begin{pmatrix} P & Q \\ Q & P \end{pmatrix} B$ と書ける. 従って

$$\det A = \det(P+Q)\det(P-Q) = \prod_{\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3 \in \{\pm 1\}} \left(\mu_0 - \sum_{j=1}^{3} \kappa_j \mu_j \right).$$

(証明終わり)

2.3 アプリオリ評価と証明の完成

以下では, 空間次元を 1 とする. 滑らかな函数 $v(t,x)$ と非負整数 s に対して

$$|v(t,x)|_s := \sum_{|\alpha| \le s} |\Gamma^\alpha v(t,x)|,$$
$$\|v(t,\cdot)\|_s := \sum_{|\alpha| \le s} \|\Gamma^\alpha v(t,\cdot)\|_{L^2}$$

と記すことにして,

$$\begin{aligned} |\!|\!| v |\!|\!|_{\rho,s,T} := \sup_{0 \le t \le T} \Big[& \|u(t,\cdot)\|_{s+5} + \|\partial u(t,\cdot)\|_{s+5} \\ & + (1+t)^{-\rho}(\|u(t,\cdot)\|_{s+7} + \|\partial u(t,\cdot)\|_{s+7}) \\ & + \sup_{x \in \mathbf{R}} \{ (1+t+|x|)^{1/2} |u(t,x)|_s \} \Big] \end{aligned}$$

と定める. このとき次が成立する.

補題 2.4 $\rho \in]0, \frac{1}{2}[$, $s \ge 10$ とする. また, u は $0 \le t \le T$ で $(NLKG)$ を満たし, F は 3 次で *non-resonance* とする. このとき, T, ε に依存しない正の定数 $C_{\rho,s}$ が存在して,

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{\rho,s,T} \le C_{\rho,s}(\varepsilon + |\!|\!| u |\!|\!|_{\rho,s,T}^3)$$

が成り立つ.

この証明については [13] を参照されたい．ここでは，この評価から主定理が導かれることを見よう．まず解の時間大域存在はいわゆる "continuous induction argument" ([5] 参照) による．即ち，上の評価から 十分小さい ε に対して $\|u\|_{\rho,s,T}$ は解が存在する限り有界に留まることが分かるので，これと時間局所解の存在定理を組み合わせることによって示される．次に漸近自由性を示す．以下，評価に現れる定数は，式ごとに異なるときでも同じ文字 C で表すことにする．また，$\|u\|_{\rho,s,\infty} \le \delta$ (≤ 1) とする．命題 2.1 より，解 u の満たす方程式は

$$(\Box + m_i^2)(u_i - \Phi_i) = \Psi_i + R_i$$

と変形されるが，上の評価より，この右辺は $L^1(0,\infty; L^2(\mathbf{R}))$ に入る．実際，Ψ_i, R_i は

$$\begin{aligned}
\big|\Psi_i(t,x)\big| &\le \frac{C}{1+t+|x|}\Big(|u(t,x)|_2 + |\partial u(t,x)|_2\Big)\big|u(t,x)\big|_3^2, \\
\big|R_i(t,x)\big| &\le C\Big(|u(t,x)|_2 + |\partial u(t,x)|_2\Big)\big|u(t,x)\big|_3^4
\end{aligned}$$

と評価されるから，

$$\begin{aligned}
&\big\|\Psi_i(t,\cdot) + R_i(t,\cdot)\big\|_{L^2} \\
&\le \frac{C}{(1+t)^2}\Big(\|u(t,\cdot)\|_2 + \|\partial u(t,\cdot)\|_2\Big) \sup_{(\sigma,y)\in[0,t[\times\mathbf{R}} \Big((1+\sigma+|y|)^{1/2}\big|u(\sigma,y)\big|_3\Big)^2 \\
&\quad + \frac{C}{(1+t)^2}\Big(\|u(t,\cdot)\|_2 + \|\partial u(t,\cdot)\|_2\Big) \sup_{(\sigma,y)\in[0,\tau[\times\mathbf{R}} \Big((1+\sigma+|y|)^{1/2}\big|u(\sigma,y)\big|_3\Big)^4 \\
&\le C\delta^3(1+t)^{-2} \quad \in L^1(0,\infty).
\end{aligned}$$

従って，$(\Box + m_i^2)U_i = 0$ および

$$\Big\|\big\{u(t) - \Phi(t)\big\} - U(t)\Big\|_E \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

を満たす $U = (U_i(t,x))_{1\le i\le N}$ が存在する．更に，

$$\begin{aligned}
\big\|\Phi(t)\big\|_E &\le C\Big(\|\Phi(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\partial\Phi(t,\cdot)\|_{L^2}\Big) \\
&\le C\Big(\|u(t,\cdot)\|_2 + \|\partial u(t,\cdot)\|_2\Big)\big\||u(t,\cdot)|_3\big\|_{L^\infty}^2 \\
&\le C_s\delta^3(1+t)^{-1}
\end{aligned}$$

であるから，結局

$$\big\|u(t) - U(t)\big\|_E \le \big\|u(t) - \Phi(t) - U(t)\big\|_E + \big\|\Phi(t)\big\|_E \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty.$$

3 諸注意

(1) 本稿で述べた non-resonance という条件は，(G) かつ (L) が成り立つための十分条件ではあるが必要条件ではない．実際，$(n,p,N) = (1,3,1)$ の場合は non-resonance ではな

いが, 序節で触れたように, 空間 1 次元で非線型項 3 次の単独方程式 $(\Box+1)u = F(u, \partial u)$ について, F が例えば

$$(**) \qquad \begin{cases} F_1 = -u^3 + 3uu_t^2 - 3uu_x^2, \\ F_2 = -u_x^3 + u_t^2 u_x - 3u^2 u_x, \\ F_3 = -u_t^3 + u_t u_x^2 + 3u^2 u_t \end{cases}$$

の線型結合で表されるならば漸近自由な大域解が存在することがわかっている ([2] [6] [9]). この事実との関係について, ここで簡単に触れておく.

まず, 補題 2.3 に現れた 4×4 行列 A を思い出そう. 2.2 節の議論において大事なことは, 標語的な言い方をすれば, $\mathcal{R}$ を法として Klein-Gordon 作用素の "逆像" を求めるには A のそれを見ればよいということであった. また, non-resonance という条件は丁度 $\det A \neq 0$ に対応するのであった. 今, $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ の場合を考えてみると,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

となっており, A の像は ${}^t(-1, 1, 1, 1)$ が張る $\mathbf{R}^4$ の 1 次元部分空間である. このことは, $(**)$ についてそれぞれ

$$\begin{aligned} F_1 &= -uuu + uQ_0(u,u) + uQ_0(u,u) + uQ_0(u,u), \\ F_2 &= -uu\partial_1 u + uQ_0(u, \partial_1 u) + uQ_0(\partial_1 u, u) + (\partial_1 u)Q_0(u,u) \\ &\qquad -2 \sum_{0 \le a,b \le 1} \eta_{ab} u Q_{a1}(u, \partial_b u) - 2u(\partial_1 u)(\Box+1)u, \\ -F_3 &= -uu\partial_0 u + uQ_0(u, \partial_0 u) + uQ_0(\partial_0 u, u) + (\partial_0 u)Q_0(u,u) \\ &\qquad +2 \sum_{0 \le a,b \le 1} \eta_{ab} u Q_{0a}(u, \partial_b u) - 2u(\partial_0 u)(\Box+1)u \end{aligned}$$

という変形ができることに対応している.

(2) 本稿で考察の対象から外した, 空間 1 次元で非線型項が 2 次の項を含む場合 (i.e. $p < 1 + \frac{2}{n}$) について少し触れておく. この場合には, (極めて特殊な場合を除いて) 本稿で述べてきた方法は適用できない. また, 単独の場合については, Delort [1] [2] によりある種の付加条件下で解の時間大域存在と漸近挙動が研究されているが, その証明では方程式が単独であることを本質的に使っているように思われる.

連立系の場合, 例えば空間 1 次元で

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_x^2 + m_1^2)u_1 = cu_2u_3 \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2 + m_2^2)u_2 = cu_3u_1 \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2 + m_3^2)u_3 = cu_1u_2 \end{cases}$$

$(c \in \mathbf{R})$ というシステムについては,

$$\int \sum_{i=1}^{3} \left\{ (\partial_t u_i)^2 + (\partial_x u_i)^2 + m_i^2 u_i^2 \right\} - 2cu_1u_2u_3 dx$$

が t に依存しない保存量であることと, 空間 1 次元の場合に限って成立する埋め込み $H^1(\mathbf{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbf{R})$ とを組み合わせて, 小さな初期値に対する解の時間大域存在は容易に分かる (cf. [5, Theorem 7.5.2]). しかし, 解の漸近挙動は全く分からない. "空間 0 次元" に相当する常微分方程式系との類推からすると $\{m_i\}$ の組み合わせに応じて漸近挙動が異なっても不思議ではないと思われるが, 本稿執筆段階で筆者が知る限りでは, 未解決である.

謝辞

第 3 節に関して, 片山聡一郎氏から助言を頂きました. 感謝の意を表します.

参考文献

[1] J.-M. Delort, Minoration du temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon non-linéaire en dimension 1 d'espace, Ann. Inst. Henri Poincaré (Analyse non linéaire), **16** (1999), 563–591.

[2] ———, Existence globale et comportment asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon quasi linéaire à données petites en dimension 1, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^e série, **34** (2001), 1–61.

[3] V. Georgiev, Global solution of the system of wave and Klein-Gordon equations, Math. Z., **203** (1990), 683–698.

[4] V. Georgiev and B. Yordanov, Asymptotic behaviour of the one-dimensional Klein-Gordon equation with a cubic nonlinearity, preprint, 1996.

[5] L. Hörmander, "Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations", Springer Verlag, Berlin, 1997.

[6] S. Katayama, A note on global existence of soluions to nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension, J. Math. Kyoto Univ., **39** (1999), 203–213.

[7] S. Klainerman, The null condition and global existence to nonlinear wave equations in three spsce dimensions, in "Lectures in Applied Mathematics", Vol. 23 (1986), pp. 293–326.

[8] R. Kosecki, The unit condition and global existence for a class of nonlinear Klein-Gordon equations, J. Diff. Eqs., **100** (1992), 257–268.

[9] K. Moriyama, Normal forms and global existence of solutions to a class of cubic nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension, Diff.Integral Eqs., **10** (1997), 499–520.

[10] K. Moriyama, S. Tonegawa, Y. Tsutsumi, Almost global existence of solutions for the quadratic semilinear Klein-Gordon equation in one space dimension, Funkcialaj Ekvacioj, **40** (1997), 313–333.

[11] T. Ozawa, K. Tsutaya and Y. Tsutsumi, Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions, Math. Z., **222** (1996), 341–362.

[12] J. Shatah, Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations, Comm. Pure. Appl. Math., **38** (1985), 685–696.

[13] H. Sunagawa, On global small amplitude solutions to systems of cubic nonlinear Klein-Gordon equations with different mass terms in one space dimension, preprint, 2001.

[14] Y. Tsutsumi, Stability of constant equilibrium for the Maxwell-Higgs equations, preprint, 2001.